



% POWTÓRZENIE

1) Procent jako część całości.

1% to po prostu $\frac{1}{100}$ część całości. Stąd wynika, że procenty możemy zapisywać jako ułamki zwykłe lub dziesiętne. Dla przykładu:

$$50\% = \frac{50^1}{100_2} = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad 50\% = 0,5$$

$$25\% = \frac{25^1}{100_4} = \frac{1}{4} \quad \text{lub} \quad 25\% = 0,25$$

$$75\% = \frac{75^3}{100_4} = \frac{3}{4} \quad \text{lub} \quad 75\% = 0,75$$

$$4\% = \frac{4^1}{100_{25}} = \frac{1}{25} \quad \text{lub} \quad 4\% = 0,04$$

$$0,5\% = \frac{0,5}{100} = \frac{5^1}{1000_{200}} = \frac{1}{200} \quad \text{lub} \quad 0,5\% = 0,005$$

$$250\% = \frac{250^5}{100_2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad 250\% = 2,5$$

• **Zadanie 1.1** Zamień procenty na ułamki zwykłe i dziesiętne:

a) 2% b) 65% c) 125% d) 0,8% e) 20% f) 1250% g) 0,04%

Odp. a) $\frac{1}{50}$; 0,02 b) $\frac{13}{20}$; 0,65 c) $\frac{5}{4}$; 1,25 d) $\frac{1}{125}$; 0,008
 e) $\frac{1}{5}$; 0,2 f) $\frac{25}{2}$; 12,5 g) $\frac{1}{2500}$; 0,0004

Oczywiście również każdy ułamek możemy zapisać w formie procentu. W przypadku ułamków dziesiętnych jest to tylko kwestia przesunięcia przecinka:

$$0,2 = 20\%; \quad 0,03 = 3\% \quad 0,345 = 34,5\% \quad 1,23 = 123\% \quad 0,0035 = 0,35\%$$

Aby zamienić ułamek zwykły na procent możemy postąpić na dwa sposoby. Najprościej, jeśli jest to możliwe zamieniamy ułamek na równy mu ułamek o mianowniku 100 np.:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%; \quad \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%; \quad \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 12\%; \quad \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 35\%$$

Jednak nie zawsze jest to możliwe – co zrobić z ułamkiem np. $\frac{3}{7}$?

W takim wypadku zamieniamy ułamek zwykły na dziesiętny (np. wykonując dzielenie) i przesuwamy przecinek. Metoda ta jest zawsze skuteczna. Prześledźmy kilka przykładów:

$$\frac{3}{7} = 0,42857... = 42,857...% \approx 43\% \quad (\text{oczywiście działanie } 3:7 \text{ wykonujemy pisemnie})$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

$$\frac{12}{5} = 2,4 = 240\%$$

$$\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$$

• **Zadanie 1.2** Zamień ułamki na procenty:

a) 0,23 b) 0,056 c) 1,24 d) 12,56 e) 0,00045 f) $\frac{3}{4}$ g) $\frac{6}{25}$ h) $\frac{11}{20}$
 i) $\frac{7}{8}$ j) $\frac{14}{5}$ k) $\frac{2}{7} =$ l) $\frac{2}{3} =$ ł) $\frac{13}{6} =$

Odp: a) 23% b) 5,6% c) 124% d) 1256% e) 0,045% f) 75% g) 24% h) 55%
 i) 87,5% j) 280% k) 28,571..%, czyli ok. 29% l) 66,6...%, czyli ok. 67%
 ł) 216,6...%, czyli ok. 217%

2) Obliczanie procentu z liczby.

Ponieważ procent to pewna część całości (ułamek), więc obliczanie procentu to po prostu obliczanie ułamka z liczby, czyli mnożenie. Przykłady:

$$10\% \text{ z } 200 = \frac{10}{100} \cdot 200 = \frac{1}{10} \cdot 200 = 20 \quad \text{lub inaczej: } 0,1 \cdot 200 = 20 \quad \text{lub prościej:}$$

jedna dziesiąta z 200 to właśnie 20.

$$50\% \text{ z } 250 = \frac{50}{100} \cdot 250 = \frac{1}{2} \cdot 250 = \frac{250}{2} = 125 \quad \text{lub inaczej: } 0,5 \cdot 250 = 125 \quad \text{lub prościej:}$$

połowa z 250 to 125.

$$75\% \text{ z } 40 = \frac{75}{100} \cdot 40 = \frac{75}{5} \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30 \quad \text{lub inaczej: } 0,75 \cdot 40 = 30 \quad \text{lub prościej:}$$

trzy czwarte z 40 to 30.

$$25\% \text{ z } 200 = \frac{25}{100} \cdot 200 = 25 \cdot 2 = 50 \quad \text{lub inaczej: } 0,25 \cdot 200 = 50$$

$$35\% \text{ z } 50 = \frac{35}{100} \cdot 50 = \frac{35}{2} = 17 \frac{1}{2} \quad \text{lub inaczej: } 0,35 \cdot 50 = 17,5$$

$$2\% \text{ z } 0,04 = \frac{2}{100} \cdot \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{1250} \quad \text{lub inaczej: } 0,02 \cdot 0,04 = 0,0008$$

$$350\% \text{ z } 45 = \frac{350}{100} \cdot 45 = \frac{35}{10} \cdot 45 = \frac{35}{2} \cdot 9 = \frac{415}{2} = 207 \frac{1}{2} \quad \text{lub inaczej: } 3,5 \cdot 45 = 207,5$$

$$0,2\% \text{ z } 40 = \frac{0,2}{100} \cdot 40 = \frac{2}{1000} \cdot 40 = \frac{2}{100} \cdot 4 = \frac{2}{25} \quad \text{lub inaczej: } 0,002 \cdot 40 = 0,08$$

• **Zadanie 2.1** Oblicz procent z liczby. Obliczenia przeprowadź na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.

a) 45% z 200 b) 3% z 36 c) 550% z 11 d) 0,04% z 440 e) 13% z 11

Odp: a) 90 b) $1\frac{2}{25}$; 1,08 c) $60\frac{1}{2}$; 60,5 d) $\frac{22}{125}$; 0,176 e) $1\frac{43}{100}$; 1,43

3) Obliczanie jakim procentem danej liczby jest inna liczba.

Procenty służą między innymi do porównywania dwóch wielkości. Pozwalają określić, jaką częścią danej liczby jest inna liczba. Przykładowo:

- Jaką częścią liczby 50 jest liczba 10 ? Oczywiście widać, że 10 to jedna piąta z 50, więc stanowi 20%, ale można to przeliczyć: $\frac{10}{50} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\%_{20\%} = 20\%$. Warto zwrócić uwagę, że w liczniku ułamka jest liczba, którą porównujemy, a w mianowniku ta liczba, która stanowi punkt odniesienia (z którą porównujemy).

Inne przykłady:

- Jaką część liczby 80 stanowi liczba 60 ? Oczywiście można odpowiedzieć od razu: trzy czwarte, czyli 75%, ale można też przeliczyć:
 $\frac{60}{80} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\%_{25\%} = 3 \cdot 25\% = 75\%$
- Jaki procent liczby 5 stanowi liczba 0,2 ?
 $\frac{0,2}{5} \cdot 100\% = \frac{2}{50} \cdot 100\%_{2\%} = 2 \cdot 2\% = 4\%$
- Jaki procent liczby 30 stanowi liczba 150 ? Oczywiście można odpowiedzieć, że stanowi pięciokrotność, czyli 500%, albo przeliczyć:
 $\frac{150}{30} \cdot 100\% = 5 \cdot 100\% = 500\%$

Oczywiście zagadnienie to może wystąpić w formie konkretnej historyjki. Np.

- *Pan Kowalski otrzymał spadek w wysokości 200 000 zł. Od tego spadku zapłacił podatek w wysokości 450 zł. Jaka jest stawka procentowa tego podatku ?*

Mówiąc wprost, musimy policzyć, jakim procentem liczby 200 000 jest liczba 450, czyli:

$$\frac{450}{200000} \cdot 100\% = \frac{450}{2000} \% = \frac{45^9}{200_{40}} \% = \frac{9}{40} \% = 0,225\% \quad \text{Ostatnia liczba to wynik dzielenia } 9:40.$$

- *Pan Nowak zarabiał do tej pory 1500 zł. Niedawno otrzymał podwyżkę pensji o 200 zł., więc od tej pory będzie zarabiał 1700 zł. O ile procent podwyższono pensję panu Nowakowi ?*

Z treści wynika, że musimy obliczyć, jaki procent kwoty 1500 stanowi 200, czyli:

$$\frac{200}{1500} \cdot 100\% = \frac{2}{15} \cdot 100\%_{20\%} = \frac{40\%}{3} = 13\frac{1}{3}\% = 13,33\% \approx 13\%$$

• **Zadanie 3.1**

Wśród 200 zabawek w sklepie 30 jest uszkodzonych. Jaki procent wszystkich zabawek stanowią zabawki nieuszkodzone ?

Odp: 85%

• **Zadanie 3.2**

W wyborach na przewodniczącego szkoły oddano 200 głosów. Darek otrzymał 30 głosów. Jaki procent wyborców głosowało na Darka ?

Odp: 15%

4) Podwyżki i obniżki

Zagadnienie to wiąże się bezpośrednio z zagadnieniem omówionym poprzednio. Weźmy przykład:

- *Cena pewnego towaru wynosi 120 zł. Ile będzie wynosić cena po podwyżce o 15%*

Najpierw obliczamy 15% ze 120:

$$\frac{15}{100} \cdot 120 = \frac{15^3}{10_2} \cdot 12 = \frac{3}{2_1} \cdot 12_6 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ zł}$$

Czyli podwyżka wyniesie 18 zł, a więc cena końcowa to 138 zł

- *Cena pewnego towaru wynosi 300 zł. Ile będzie wynosić cena po obniżce o 35% ?*

Najpierw obliczamy 35% z 300:

$$\frac{35}{100_1} \cdot 300_3 = 35 \cdot 3 = 105 \text{ zł}$$

Cena zostanie więc obniżona o 105 zł i będzie wynosić 195 zł.

- *Cenę towaru podwyższono z 20zł do 25 zł. O ile procent podwyższono cenę ?*

Cena wzrosła o 5 zł. Musimy więc policzyć jakim procentem kwoty 20 zł (ceny początkowej) jest kwota 5

zł (różnica cen): $\frac{5}{20_1} \cdot 100\%_{5\%} = 5 \cdot 5\% = 25\%$. Czyli cenę podwyższono o 25%.

- *Cenę pewnego towaru obniżono ze 150 zł do 120 zł. O ile procent obniżono cenę ?*

Cenę obniżono o 30 zł (różnica cen) więc musimy tą kwotę porównać z ceną początkową, czyli 150 zł.

Obliczamy więc, jakim procentem kwoty 150 zł jest kwota 30 zł:

$$\frac{30^1}{150_5} \cdot 100\% = \frac{1}{5_1} \cdot 100\%_{20\%} = 20\% \quad \text{Czyli cenę obniżono o 20\%}.$$

- *Cenę towaru podwyższono z 1,5 zł do 1,6 zł. O ile% podwyższono cenę ?*

Różnica cen wynosi 0,1 zł. Obliczamy, jaki to procent kwoty początkowej, czyli 1,5 zł:

$$\frac{0,1}{1,5} \cdot 100\% = \frac{1}{15_3} \cdot 100\%_{20\%} = \frac{20\%}{3} = 6\frac{2}{3}\% = 6,66\% \approx 7\% \quad \text{Czyli cenę podwyższono o ok.7\%}.$$

- **Zadanie 4.1** *Uzupełnij tabelę:*

	Cena początkowa	Podwyżka/obniżka (%)	Cena końcowa
a)	15 zł	+20%	
b)	15 zł	-10%	
c)	25 zł		30zł
d)	30 zł		25 zł

Odp: a)18zł b) 13,5 zł c) +20% d) ok. – 16,7%

- **Zadanie 4.2**

Jabłka kosztują 4 zł, a gruszki 5 zł.

a) *o ile procent gruszki są droższe od jabłek ?*

b) *o ile procent jabłka są tańsze od gruszek ?*

Odp: a) o 25% b) o 20%

5) Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent.

To zagadnienie trochę różni się od poprzednich, gdyż wymaga ułożenia i rozwiązania równania. Rozpatrzmy to na prostym przykładzie.

- *Oblicz liczbę, której 20% wynosi 4.*

Oczywiście wiadomo, że 20% to jedna piąta, więc z treści wynika, że jedna piąta szukanej liczby to 4, czyli szukana liczba to 20. Przy innym układzie liczb nie uda się tego rozwiązać tak prosto, warto więc poznać ogólny sposób na rozwiązanie takiego zagadnienia:

Oznaczmy przez x szukaną liczbę. Treść zadania możemy zapisać następująco:

20% z liczby x wynosi 4, czyli:

20% z $x = 4$, aby obliczyć procent z liczby wystarczy zamienić procent na ułamek i pomnożyć przez liczbę (punkt 2) więc:

$$0,2x = 4 \text{ } / :0,2$$

$$x = 4 : 0,2$$

$$x = 4 : \frac{2}{10} = 4_2 \cdot \frac{10}{2_1} = 2 \cdot 10 = 20$$

Szukana liczba wynosi więc 20.

- 15% pewnej liczby to 10. Jaka to liczba ?

$$15\% \text{ z } x = 10$$

$$0,15x = 10 \text{ } / : 0,15$$

$$x = 10 : 0,15 = 10 : \frac{15}{100} = 10_2 \cdot \frac{100}{15_3} = 2 \cdot \frac{100}{3} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$$

Czyli szukana liczba to $66\frac{2}{3}$. Jak widać trudno byłoby uzyskać taki wynik wykonując obliczenia w pamięci

- 250% pewnej liczby to 120. Jaka to liczba ?

$$250\% \text{ z } x = 120$$

$$2,5x = 120 \text{ } / : 2,5$$

$$x = 120 : 2,5 = 120 : \frac{25}{10} = 120 \cdot \frac{10^2}{25_5} = 120_{24} \cdot \frac{2}{5_1} = 24 \cdot 2 = 48$$

Oczywiście omawiane zagadnienie występuje najczęściej w powiązaniu z bardziej konkretną treścią. Prześledźmy kilka przykładów.

- Pan Kowalski dostał podwyżkę w wysokości 25% i będzie zarabiał więcej o 200 zł. Ile zarabiał przed podwyżką ?

x – pensja pana Kowalskiego przed podwyżką

25% z x wynosi 200 zł

$$0,25x = 200 \text{ } / : 0,25$$

$$x = 200 : 0,25 = 200 : \frac{25}{100} = 200 \cdot \frac{100^4}{25_1} = 200 \cdot 4 = 800 \text{ zł}$$

Odp: Pan Kowalski przed podwyżką zarabiał 800 zł.

- Wiadomo, że 35% uczniów pewnej klasy to chłopcy. Ilu uczniów liczy klasa, jeśli chłopców jest siedmiu ?

x – liczba wszystkich uczniów klasy

35% z $x = 7$

$$0,35x = 7 \text{ } / : 0,35$$

$$x = 7 : 0,35 = 7 : \frac{35^7}{100_{20}} = 7_1 \cdot \frac{20}{7_1} = 20$$

Odp: Klasa liczy 20 uczniów.

Aby radzić sobie z trudniejszymi zadaniami warto nauczyć się zapisywać zmiany szukanej wartości w postaci jednego wyrażenia (jednomianu).

Założmy, że chcemy zapisać liczbę o 20% większą od x . Można to zrobić następująco:

Do liczby x musimy dodać jej 20%, czyli:

$$x + 20\% \text{ z } x = x + 0,2x = 1,2x$$

Można pomyśleć jeszcze prościej:

Jeśli do pewnej liczby dodamy jej 20% to otrzymamy 120% tej liczby. Otrzymamy więc 120% liczby x , czyli $1,2x$

Tak czy inaczej liczba większa o 20% od x to $1,2x$.

Prześledźmy jeszcze kilka przykładów:

- Liczba o 15% mniejsza od x to $0,85x$ (jeśli od danej liczby odejmiemy jej 15% to otrzymamy 85% tej liczby)
- Liczba o 5% większa od x to $1,05x$ (jeśli do danej liczby dodamy jej 5% to otrzymamy 105% tej liczby)
- Liczba o 2% mniejsza od b to $0,98b$ (jeśli od danej liczby odejmiemy jej 2% to otrzymamy 98% tej liczby)
- Liczba o 120% większa od c to $2,2c$ (jeśli do danej liczby dodamy jej 120% to otrzymamy 220% tej liczby)

Wykorzystajmy ten zapis w kilku przykładach:

- Liczba o 10% większa od a wynosi 55. Oblicz liczbę a .

Jeśli a jest szukaną liczbą, to liczba większa od niej o 10% może być zapisana jako $1,1a$.

Mamy więc równanie: $1,1a = 55 / :1,1$

$$a = 55 : 1,1 = 55 : \frac{11}{10} = 55 \cdot \frac{10}{11} = 5 \cdot 10 = 50$$

Liczba a wynosi więc 50.

- Liczba o 120% większa od x wynosi 88.

Oczywiście liczba o 120% większa od x to $2,2x$.

Mamy więc: $2,2x = 88 / : 2,2$

$$x = 88 : 2,2 = 88 : \frac{22}{10} = 88 \cdot \frac{10}{22} = 4 \cdot 10 = 40$$

Poniżej wykorzystamy poznany sposób zapisu w bardziej konkretnych sytuacjach:

- Proszek do prania „Zwykły” podrożał o 5% i kosztuje teraz 21 zł. Ile kosztował przed podwyżką ?

Oznaczmy przez x cenę proszku przed podwyżką. Po podwyżce o 5% można ją zapisać jako $1,05x$.

Mamy więc: $1,05x = 21 / : 1,05$

$$x = 21 : 1,05 = 21 : \frac{105}{100} = 21 \cdot \frac{100}{105} = \frac{100}{5} = 20$$

Odp: Przed podwyżką proszek kosztował 20 zł.

- Prawdziwki po suszeniu tracą ok. 92% masy. Ile kilogramów prawdziwków trzeba zebrać, aby otrzymać 0,5 kg suszonych grzybów

Niech x oznacza ilość (w kg) zebranych grzybów. Z treści wynika, że po wysuszeniu grzyby będą ważyć o 92% mniej niż x , czyli zostanie 8% z x , więc:

$0,08x = 0,5 / :0,08$

$$x = 0,5 : 0,08 = \frac{5}{10} : \frac{8}{100} = \frac{5}{10} \cdot \frac{100}{8} = 5 \cdot \frac{10}{8} = \frac{50}{8} = 6 \frac{2}{8} = 6 \frac{1}{4} = 6,25 \text{ kg}$$

Odp: Należy zebrać 6,25 kg prawdziwków.

• Zadanie 5.1

Po obniżce cen o 10% za kurtkę zapłacono 450 zł. Ile kosztowała przed obniżką ?

Odp: 500 zł

• Zadanie 5.2

Biuro podróży podało, że aż 20 000 osób, czyli 40% klientów biura odwiedziło Egipt. Ile osób skorzystało z usług tego biura ?

Odp: 50 000 osób.